EEIGM 1ère Année
ENSGSI 1ère Année

Samedi 17/03/2001

MECANIQUE
Résistance des Matériaux

Durée : 3 h
Documents non autorisés

Le but du problème est de rechercher la charge maximum que peut supporter le crochet illustré sur la figure 1.

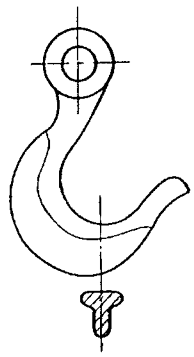

Figure 1

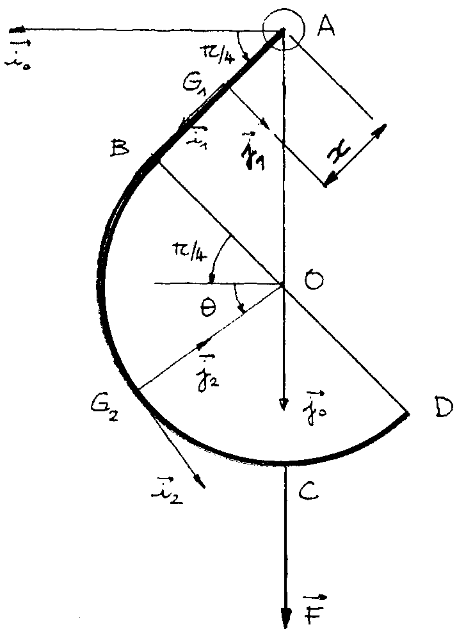

Figure 2

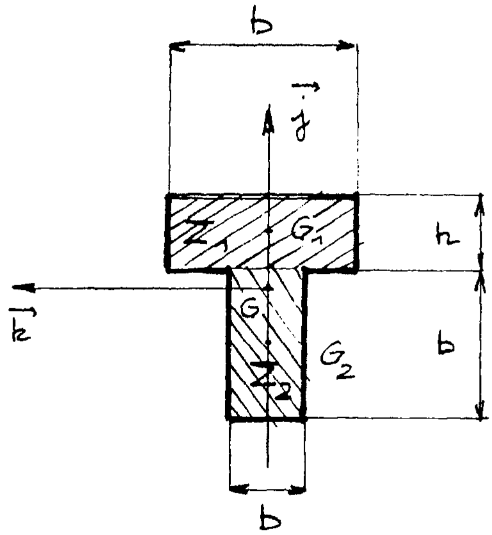

Figure 3

Ce crochet peut être modélisé comme le suggère la figure 2 par une poutre constituée par un élément AB de poutre droite de longueur R et un élément BD de poutre circulaire de rayon R et de centre O.
Le crochet est maintenu en A par une articulation cylindrique qui peut être schématisée par un appui simple. Il supporte en C une charge concentrée $\vec{F}$.

La section droite (Σ) peut être modélisée comme le suggère la figure 3 par un T formé de 2 sections rectangulaires (Σ_1) et (Σ_2).

Partie I : section droite.

Question 1 : montrer que le centre de section G de la section droite (Σ) est situé au milieu du segment G_1G_2 où G_1 et G_2 sont respectivement les centres de section des sections rectangulaires (Σ_1) et (Σ_2).

Question 2 : déterminer le moment quadratique I_{Gz} de la section droite (Σ) par rapport à l'axe $G\vec{k}$. On peut se rappeler que la formule d'Huygens s'écrit $I^1_{Gz} = I^1_{G_1z} + S_1 \left\|\overrightarrow{GG_1}\right\|^2$ pour la section droite (Σ_1).

Partie II : déplacement du point d'application du chargement.

Question 3 : donner les expressions des efforts intérieurs N_1, T_{y1} et M_{z1} pour l'élément de poutre droite AB.

Question 4 : donner les expressions des efforts intérieurs N_2, T_{y2} et M_{z2} pour l'élément de poutre circulaire BC.

Question 5 : la 2ème formule de Bresse s'écrit $\vec{U}(C) = \vec{U}(A) + \vec{\Omega}(A) \wedge \overrightarrow{AC} + \int_{s_A}^{s_C} \left[\frac{M_z}{EI_{Gz}} \vec{k} \wedge \overrightarrow{GC} \right] ds$ lorsque l'on néglige les influences de l'effort normal N et de l'effort tranchant T_y. Déterminer la composante selon $\vec{j}_0$ du déplacement du point C, soit $\delta = \vec{U}(C).\vec{j}_0$.

Partie III : contraintes.

Question 6 : on ne s'intéresse qu'aux contraintes normales $\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_z y}{I_{Gz}}$ induites par l'effort normal N et le moment fléchissant M_z. Déterminer le point où le module de la contrainte normale $|\sigma_x|$ est maximum et préciser la valeur de la contrainte.

Partie IV : application numérique.

Les caractéristiques géométriques sont $b = 60\,mm$, $h = 20\,mm$ et $R = 150\,mm$. Le matériau est de l'acier dont le module d'Young est $E = 210\,GPa$ et la limite élastique $R_e = 240\,MPa$.

Question 7 : on adopte un coefficient de sécurité de 3. Déterminer la charge maximum que peut supporter le crochet.

Question 1 : $S\overrightarrow{GG} = S_1\overrightarrow{GG_1} + S_2\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$

$S_1 = S_2 \Rightarrow \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$ G est le milieu du segment G_1G_2

Question 2 :

$I_{Gz} = I^1_{Gz} + I^2_{Gz}$ $\quad I^1_{Gz} = I_{G_1z} + S_1\|\overrightarrow{GG_1}\|^2 = \dfrac{bh^3}{12} + bh\left(\dfrac{b+h}{4}\right)^2$

$I^2_{Gz} = I_{G_2z} + S_2\|\overrightarrow{GG_2}\|^2 = \dfrac{hb^3}{12} + bh\left(\dfrac{b+h}{4}\right)^2$

$I_{Gz} = \dfrac{bh}{24}\left[2h^2 + 2b^2 + 3\ (b+h)^2\right] = \dfrac{bh}{24}\left(5h^2 + 5b^2 + 6bh\right)$

Question 3 : $\mathcal{T}_i = -\cancel{\mathcal{T}_{amont}} = \mathcal{T}_{aval} = \mathcal{T}_c$ avec $\mathcal{T}_c \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\mathcal{T}_c)} \ {}_{R_0}\left| \begin{array}{l} 0 \\ F \\ 0 \end{array}\right. \\ \vec{m}(\mathcal{T}_c, C) = \vec{0} \end{array}\right.$

$\vec{R}(\mathcal{T}_i) = \overrightarrow{R(\mathcal{T}_c)} \ {}_{R_0}\left| \begin{array}{l} 0 \\ F \\ 0 \end{array}\right. {}_{R_1}\left| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2}F = N_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}F = T_{y1} \\ 0 \end{array}\right.$ $\qquad \vec{j_0} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i_1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j_1}$

$\vec{m}(\mathcal{T}_i, G_1) = \cancel{\vec{m}(\mathcal{T}_c, C)} + \overrightarrow{G_1C} \wedge \vec{R}(\mathcal{T}_c)$ $\qquad$ avec $\overrightarrow{G_1C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG_1}$

$${}_{R_0}\left| \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2}x \\ R\sqrt{2}+R - x\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left| \begin{array}{l} 0 \\ F \\ 0 \end{array}\right. \qquad {}_{R_0}\left| \begin{array}{l} 0 \\ R\sqrt{2}+R \\ 0 \end{array}\right. - {}_{R_0}\left| \begin{array}{l} x\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{m}(\mathcal{T}_i, G_1) \ {}_{R_1}\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\frac{F\sqrt{2}}{2}x = M_{z1} \end{array}\right.$$

Question 4 : $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_c$

$\vec{R}(\mathcal{T}_i) = \overrightarrow{R(\mathcal{T}_c)} \ {}_{R_0}\left| \begin{array}{l} 0 \\ F \\ 0 \end{array}\right. {}_{R_2}\left| \begin{array}{l} F\cos\theta = N_2 \\ -F\sin\theta = T_{y2} \\ 0 \end{array}\right.$ $\qquad \vec{j_0} = \cos\theta\,\vec{i_2} - \sin\theta\,\vec{j_2}$

$\vec{m}(\mathcal{T}_i, G_2) = \cancel{\vec{m}(\mathcal{T}_c, C)} + \overrightarrow{G_2C} \wedge \overrightarrow{R(\mathcal{T}_c)}$ $\qquad$ avec $\overrightarrow{G_2C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG_2}$

$${}_{R_0}\left| \begin{array}{l} -R\cos\theta \\ R(1-\sin\theta) \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left| \begin{array}{l} 0 \\ F \\ 0 \end{array}\right. \qquad {}_{R_0}\left| \begin{array}{l} 0 \\ R \\ 0 \end{array}\right. - {}_{R_0}\left| \begin{array}{l} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{\mathcal{M}}(\mathcal{E}_i, G_2) \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -FR\cos\theta = M_{z_2} \end{array} \right._{R_2}$$

Question 5 :

$$\vec{U}(C).\vec{j_0} = \cancel{\vec{U}(A)}.\vec{j_0} + \left[\cancel{\vec{\Omega}(A)} \wedge \vec{AC}\right].\vec{j_0} + \left| \int_0^R \frac{M_{z_1}}{EI_{Gz}} \vec{k_1} \wedge \vec{G_1C}\, dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \frac{M_{z_2}}{EI_{Gz}} \wedge \vec{G_2C}\, R d\theta \right| . \vec{j_0}$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{M_{z_1}}{EI_{Gz}} \end{array} \right._{R_0} \wedge \left| \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2}x \\ R(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{M_{z_2}}{EI_{Gz}} \end{array} \right._{R_0} \wedge \left| \begin{array}{l} -R\cos\theta \\ R(1-\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{U}(C).\vec{j_0} = \int_0^R \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\frac{Fx^2}{2}\right) dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{EI_{Gz}} \left(FR^3\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$\vec{U}(C).\vec{j_0} = \frac{FR^3}{6EI_{Gz}} + \frac{FR^3}{2EI_{Gz}}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{U}(C).\vec{j_0} = \frac{FR^3}{24EI_{Gz}}\left(9\pi + 10\right)$$

Question 6 : $\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_{Gz}} y = \left(\frac{1}{S} + \frac{Ry}{I_{Gz}}\right) F\cos\theta$ et il est évident que $|\sigma_x|$ est maximum pour $\theta = 0$. Dans le cadre de l'application numérique $\left|\frac{1}{S} + \frac{Ry}{I_{Gz}}\right|$ est maximum sur la fibre extérieure soit $y = -\frac{3b+h}{4}$. On obtient :

$$\max|\sigma_x| = \frac{F\left[2h^2 + 2b^2 + 3(b+h)^2 - 12R(3b+h)\right]}{2bh\left[2h^2 + 2b^2 + 3(b+h)^2\right]} \# 5{,}098.10^3\, F$$

Question 7 : on note k le coefficient de sécurité. $\max|\sigma_x| \leq \frac{Re}{k}$

soit $$F \leqslant \frac{2bh\left[2h^2+2b^2+3(b+h)^2\right]R_e}{k\left[2h^2+2b^2+3(b+h)^2-12R(3b+h)\right]} \# 15652 \text{ N}.$$